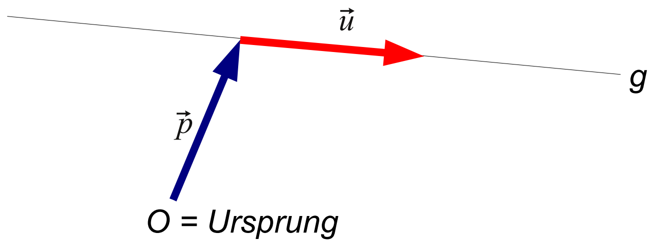
Bereitgestellt von: www.sven-reichel.de

Geraden / Ebenen:

Darstellung von Geraden:



allgemeine Form (Parameterform): $\vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$ $\qquad t\in\mathbb{R}$
$\vec{p}$ ist Stützvektor (Startpunkt – Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden) und $\vec{u}$ ist Richtungsvektor

Aufstellen einer Geradengleichung aus zwei Punkten:

Man nimmt den Ortsvektor des einen Punktes als Stützvektor und bestimmt den Richtungsvektor, indem man den Ortsvektor des anderen Punktes vom Stützvektor abzieht.

Bsp: A (2 / 3) und B (4 / 2)

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot(\overrightarrow{AB})=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot(\vec{B}-\vec{A})=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Punkteprobe (Liegt ein Punkt auf einer Geraden?):

Man setzt in der Parametergleichung der Geraden den Punkt für $\vec{x}$ ein und überprüft, ob alle Gleichungen eine Lösung ergeben:

Bsp: A (3 / 9) und $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \quad => \quad t=1$$

da für $t=1$ alle Gleichungen eine Lösung haben, liegt der Punkt A auf der Geraden g ($A\in g$)

Will man einen beliebigen Punkt auf einer Geraden bestimmen, setzt man für *t* einen beliebigen Wert ein.

Gegenseitige Lage von Geraden:

Geraden können:
- echt parallel sein
- identisch sein
- sich schneiden
- windschief (ab 3. Dimension) sein

Geraden echt parallel? ($g \| h$):

Wenn zwei Geraden echt parallel sind, sind ihre Richtungsvektoren gleich bzw. linear abhängig. Man überprüft diese also auf lineare Abhängigkeit. Sollten diese linear Abhängig sein, muss es allerdings noch nicht bedeuten, dass die Geraden echt parallel sind, sie können ebenso auch identisch sein. (s.u.)

Geraden identisch? ($g = h$):

Wenn zwei Geraden identisch sind, müssen ihre Richtungsvektoren linear abhängig sein (s.o.) Man nimmt den Stützvektor der einen Geraden und setzt ihn in die Geradengleichung der anderen Geraden ein. Geht das Gleichungssystem auf, sind die Geraden identisch. (Bsp: S.63 a))

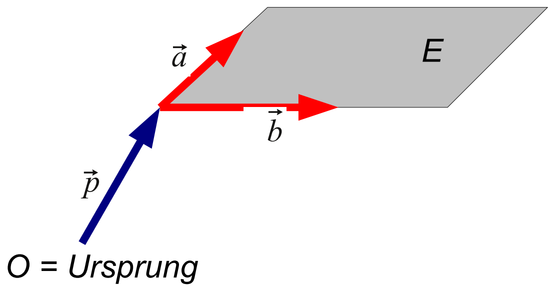
haben Geraden einen Schnittpunkt?:

Sollten die Geraden sich schneiden, tun sie dies in einem gemeinsamen Punkt. Man überprüft dies, indem man beide Geradengleichungen gleichsetzt. Gibt es genau eine Lösung schneiden sie sich. Um den Schnittpunkt zu erhalten, setzt man in eine (welche ist egal) Geradengleichung das Ergebnis des jeweiligen Parameters ein. (Bsp: S.63 b))

sind Geraden windschief?:

Sollten zwei Geraden windschief sein, müssen ihre Richtungsvektoren linear unabhängig sein, und es keine Lösung(en) geben, wenn man die Geradengleichungen gleichsetzt,da sie keinen gemeinsamen Punkt haben. (Bsp: S.63 c))

Darstellung von Ebenen:



allgemeine Form (Parameterform): $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ $\quad t, s \in \mathbb{R}$
$\vec{p}$ ist Stützvektor (Startpunkt) und $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Spannvektor (müssen linear unabhängig sein!).

Aufstellen einer Ebenengleichung (Parameterform) aus:

drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen (Ebene ist durch 3 Punkte definiert):

Man nimmt einen Punkt als Startpunkt, dessen Ortsvektor ist unser Stützvektor. Nun bildet man die Vektoren von diesem Punkt zu den anderen beiden Punkten, diese sind unsere Spannvektoren. (Bsp 1b: S.67)

Bsp: A (2 / 3 / 4); B (3 / 5 / 6); C (1 / 3 / 2)
A soll Startpunkt sein:

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3-2\\5-3\\6-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1-2\\3-3\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

<u>einer Geraden und einem Punkt:</u>

Man wählt einen beliebigen Punkt auf der Geraden als Startpunkt. Dessen Ortsvektor ist unser Stützvektor, der Vektor zwischen dem gegebenen und dem beliebigen Punkt bildet einen Spannvektor und der Richtungsvektor der Geraden den anderen. Nun können wir die Ebene aufspannen.

<u>zwei parallele Geraden:</u>

Man wählt einen beliebigen Punkt auf der einen Geraden und geht dann wie mit einem Punkt und einer Geraden vor.

<u>sich zwei schneidende Geraden:</u>

!Man muss den Schnittpunkt nicht ausrechnen. Man nimmt die beiden Richtungsvektoren der Geraden als Spannvektoren und als Stützvektor nimmt man einen Stützvektor einer Geraden (welchen ist egal)

Koordinatenform der Ebene:

allgemeine Form (Koordinatenform): $a\cdot x_1+b\cdot x_2+c\cdot x_3=d$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$

<u>Parameterform in Koordinatenform:</u>

Bestimmung mithilfe der Determinante aus den Spannvektoren:

Ebene in Parameterform: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\cancel{1} & \cancel{2}\\ -2 & 5\\ 3 & 7\\ 1 & 2\\ -2 & 5\\ \cancel{3} & \cancel{7}\end{vmatrix}$$

- Produkt addieren - Produkt subtrahieren

$\}\ (-2)\cdot 7-3\cdot 5=-29=a$

$\}\ 3\cdot 2-1\cdot 7=-1=b$

$\}\ 1\cdot 5-(-2)\cdot 2=9=c$

$E:-29x_1-x_2+9x_3=d$

Punktprobe mit dem Stützvektor: einsetzen des Punktes in Koordinatenform:

$d=-29\text{cdot}2-2+9\cdot 1=-51$

Koordinatenform der Ebene: $E:-29\text{cdot}x_1-x_2+9\text{cdot}x_3=-51$

<u>Koordinatenform in Parameterform:</u>

Bestimmung von 3 Spurpunkten (die Punkte auf den Koordinatenachsen).

$E:x_1+2\text{cdot}x_2-3\cdot x_3=6$

P1 (6 / 0 / 0): $x_1=1 ; x_2=0 ; x_3=0$

P2 (0 / 3 / 0): $x_1=0 ; x_2=1 ; x_3=0$

P3 (0 / 0 / -2): $x_1=0 ; x_2=0 ; x_3=1$

aus diesen 3 Punkten kann man eine Ebene aufspannen (s.o.)

oder man formt die Koordinatengleichung jeweils nach x_1, x_2, x_3 um und baut daraus die Parameterform (Bsp2 S.71)

Punktprobe (Liegt ein Punkt in einer Ebene?):

Man setzt den Punkt in die Koordinatenform ein, oder in die Parameterform (siehe Gerade + Bsp2 S.67). Mit Koordinatenform:

Bsp: A (2 / 1 / -2) und $E: 2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_2 = 11$
$2 \cdot 2 + 1 - 3 \mathrm{cdot}(-2) = 4 + 1 + 6 = 11$ => $A \in E$

Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene:

Eine Gerade kann:
- eine Ebene schneiden
- zur Ebene parallel liegen
- in einer Ebene liegen (eine Teilmenge sein)

<u>Gerade schneidet Ebene:</u>

Es empfiehlt sich, die Ebene in Koordinatenform und die Gerade in Parameterform umzuwandeln.
Man setzt dann die Gerade in die Koordinatenform der Ebene ein, ergibt dies genau eine Lösung, schneidet die Gerade die Ebene.

Bsp: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 6$

$E: (2+t) + 2 \cdot (2-t) - 3 \mathrm{cdot}(1+t) = 6$ => $t = \frac{-3}{4}$

um den Schnittpunkt auszurechnen, setzt man *t* in die Geradengleichung ein.

<u>Gerade liegt zur Ebene parallel ($g \| E$):</u>

Liegt die Gerade parallel zur Ebene, hat sie keinen gemeinsamen Punkt mit der Ebene. Man setzt wieder *g* in *E* ein, wenn die Gleichung keine Lösung hat, ist die Gerade parallel zur Ebene.

<u>Gerade liegt in der Ebene (ist eine Teilmenge der Ebene $E \ni g$):</u>

Liegt die Gerade in der Ebene, liegen alle Punkte der Geraden in der Ebene, d.h. man geht vor wie oben und wenn unendlich viele Lösungen (wenn man für *t* alles einsetzen darf) möglich sind, liegt sie in der Ebene.

Gegenseitige Lage zweier Ebenen:

Eine Ebene kann:
- eine andere schneiden
- identisch zu einer anderen sein
- parallel zu einer anderen sein

Ebene schneidet Ebene und bildet eine Schnittgerade:

Es empfiehlt sich die eine Ebene in Parameter- und die andere in Koordinatenform zu bringen.
Man setzt dann die eine Ebene in Parameterform (wie die Gerade s.o.) in die Koordinatenform der anderen Ebene ein, formt nach einem Parameter um und setzt den in die Parameterform der Ebene ein. Ergibt sich eine Lösung, schneidet die Gerade die Ebene und man kann durch einsetzen den Schnittpunkt ermitteln.

Bsp: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E_2: x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 7$

$(3 + 2\mathrm{cdot} r - s) - (1 - r) + 2 \cdot (5 + 3s) = 7$

nach einem Parameter umformen: $s = -1 - \frac{3}{5} \cdot r$

in E_1 eingesetzt ergibt die Schnittgerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1 - \frac{3}{5} \cdot r) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 13/5 \\ -1 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

Ebene ist identisch zu einer anderen:

1. Weg: Wie oben mit einsetzen. Gibt es unendlich viele Lösungen der Gleichung, sind die Ebenen identisch.
2. Weg: Beide Ebenen in Koordinatenform umwandeln. Sind die beiden Ebenen in der Koordinatenform gleich, bzw. ein Vielfaches, sind sie identisch:

Bsp: $E_1 = x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 5$
$E_2: 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 = 10$
multipliziert man die obere Ebenengleichung mit 2, ist sie zur zweiten identisch => die beiden Ebenen sind identisch.

Ebene ist parallel zu einer anderen:

1. Weg: Wie oben mit einsetzen. Gibt es keine Lösung, sind die beiden Ebenen parallel.
2. Weg: Wie oben mit vergleichen der Koordinatenformen. Sind diese identisch bis auf das *d*, handelt es sich um parallele Ebenen:

Bsp: $E_1 = x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 5$
$E_2 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 = 6$
multipliziert man E_1 mit 2 sind *a,b,c* identisch, aber *d* differiert, folglich sind die Ebenen parallel.

Alle Angaben ohne Gewähr!

by Sven Reichel