Bereitgestellt von: www.sven-reichel.de

Lösung von linearen Gleichungssystemen:

1. Einfache Gleichungen (2 Unbekannte): Einsetzverfahren

- Umformen einer Gleichung, so dass eine Variable isoliert ist
- Isolierte Variable in der anderen Gleichung ersetzen und Gleichung lösen
- die Lösung in die Gleichung einsetzen und nach der anderen Variablen auflösen

Bsp:

$$2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 = -7$$
$$-x_1 + x_2 = 2 \qquad\qquad x_2 = 2 + x_{1\,\mathrm{new\,li}}$$

$$2\cdot x_1 - 3\cdot(2 + x_1) = -7$$
$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_2 = 2 + 1 = 3$$

$$L = \{1;3\}$$

Ebenfalls möglich wäre, beide Gleichungen nach einer Variablen umzuformen und dann gleichzusetzen (S.6 Bsp 1a). Zeichnerisch könnte man es lösen, indem man jede Gleichung als Gerade ansieht und auf die Form $y = m\cdot x + c$ bringt (S.6 Bsp1b). Das GAUSS-Verfahren wäre natürlich auch möglich.

2. Komplizierte Gleichungen (3 und mehr Unbekannte): GAUSS-Verfahren

- Ziel: „Stufensystem", d.h. durch einsetzen jede Variable lösbar
- zulässige Äquivalenzumformungen:
  - Gleichungen vertauschen
  - mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren
  - Gleichungen addieren und dadurch eine ersetzen
- Vorgehensweise:
  - schauen welche Variable man am besten rausschmeißt
  - kopieren
  - Gleichungen mit einer Zahl multiplizieren und mit einer anderen addieren, so dass x_1, x_2 oder x_3 0 wird. Jede Gleichung benutzen! In jeder Matrixzeile müssen so viele Gleichungen stehen wie am Anfang da waren (beim 1. Schritt: 1 kopieren, beim 2. Schritt: 2 kopieren,...)

Bsp:

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (-1) \\ \\ (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (4)=(1)+(2) \\ (5)=(1)+(3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & 14 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (4) \\ (6)=(4)+(5) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$ Stufenform

$$-5\cdot x_3 = -10 \qquad -4\cdot x_2 + 3\cdot 2 = 4 \qquad 3\cdot x_1 + 6\cdot 0{,}5 - 2\cdot 2 = -4$$
$$x_3 = 2 \qquad x_2 = 0{,}5 \qquad x_1 = -1$$

$$L=\{-1;0{,}5;2\}$$

3. Parameter auf der rechten Seite:

- Parameter wie eine Zahl benutzen
- aus $(2\cdot r+1)+(4r-3)$ wird $6\cdot r-2$
- Matrix auf Stufenform bringen (wie oben)
- Lösungsmenge in Abhängigkeit von Parameter angeben
- unter Umständen Angabe der Lösung in Verktorschreibweise

Bsp: Lösungsmenge: $L=\{(3+2r;6r;8)/r\in\mathbb{R}\}$

Vektorschreibweise: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2r\\0+6r\\8+0r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$

4. Parameter auf der linken Seite:

- vorerst Parameter wie eine Zahl benutzen und LGS auf Stufenform bringen (wie oben)
- !Fallunterscheidung: für welche Gleichung hat die Lösung
  - unendlich viele Lösungen: Zähler = 0
  - keine Lösung: Nenner betrachten
  - eine Lösung: wenn keine von den oberen beiden Fällen zutrifft

Bsp: angenommen es kommt bei der Stufenform folgendes als letzte Gleichung raus:

$$(r^2-1)\cdot x=r-1 \quad => \quad x=\frac{r-1}{r^2-1}$$

Zähler betrachten: $r-1=0$ => $r=1$

für $r=1$ gilt $x=0$ folglich spielt r keine Rolle => LGS hat unendlich viele Lösungen

Nenner betrachten (darf nicht 0 werden): $r^2-1=0$ => $r=\pm 1$

für $r=1$ und $r=-1$ ist der Nenner 0 => das LGS hat keine Lösung

=> für $r\neq\pm 1$ hat das LGS genau eine Lösung

$$L=\{(\frac{r-1}{r^2-1},\ldots)r\in\mathbb{R}\setminus(\pm 1)\}$$

5. Überbestimmte LGS (z.B. 3 Gleichungen mit 2 Variablen):

- überprüfen, ob zwei Gleichungen gleich/ähnlich sind, wenn ja eine streichen
- so viele Gleichungen wie vorhandene Variablen bearbeiten, die Überzähligen vorerst außen vor lassen.
- Lösen des LGS
- Variablen in überzählige Gleichungen einsetzen, wenn die überzähligen

Gleichungen ALLE stimmen, hat das LGS die Lösungen, stimmen sie nicht, hat es keine Lösung

6. Unterbestimmte LGS (z.B. 2 Gleichungen mit 3 Variablen):

- für x_1, x_2, x_3 oder x_n ein Parameter einsetzen, diesen wie eine Zahl behandeln und dann wie 4. lösen. Unter Umständen können auch mehrere Parameter eingesetzt werden.

7. Anwendung linearer Gleichungssysteme:

- siehe S. 15/16

8. GTR:

rref (*Matrix*): Lösen einer LGS-Matrix
solve (*Gleichung, Var*): Lösen einer Gleichung, für Var die Variable einsetzen, nach der aufgelöst werden soll
simplify (*Term*): Vereinfachen eines Terms
ans: übernimmt die vorherige Lösung

Alle Angaben ohne Gewähr

by Sven Reichel