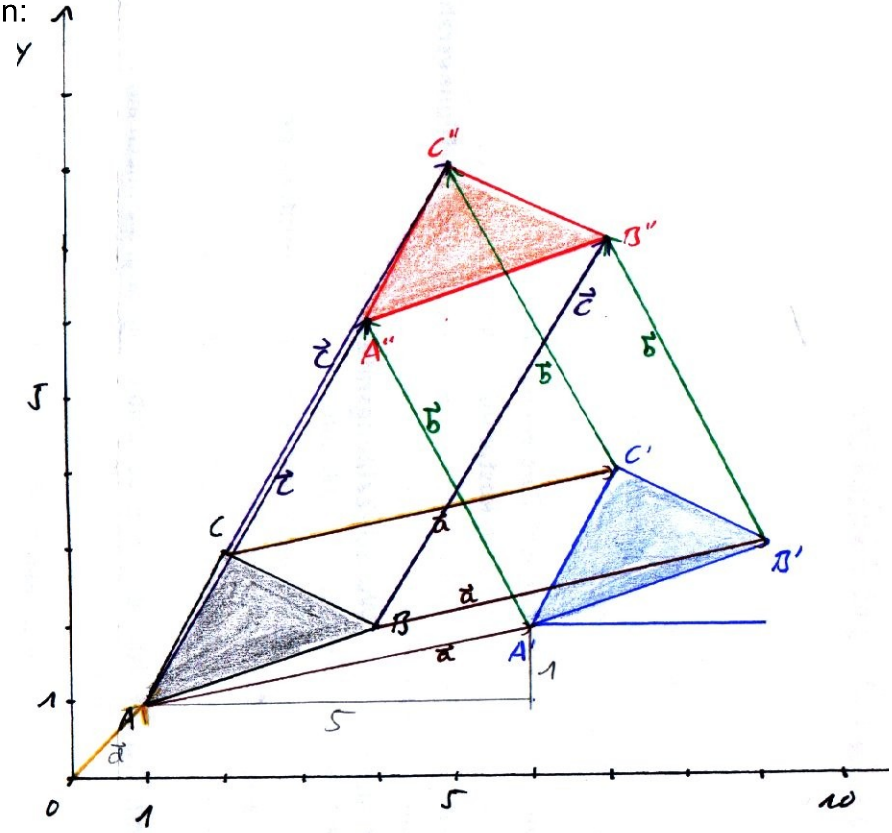
Bereitgestellt von: www.sven-reichel.de

Vektorrechnung:

Definition:

Vektoren beschreiben eine Richtung, sowie eine Länge im Koordinatensystem. Als praktisches Beispiel kann man sich die Verschiebung eines Dreiecks im Koordinatensystem (2D) vorstellen:



Punkte:

A(1/1); B(4/2); C(2/3)	A'(6/2); B'(9/3); C'(7/4)	A"(4/6); B"(7/7); C"(5/8)

Vektoren:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Das schwarze Dreieck wird zuerst mit $\vec{a}$ verschoben (blaues Dreieck) und anschließend mit $\vec{b}$ verschoben (rotes Dreieck). Anstatt mit $\vec{a}+\vec{b}$ kann man das Dreieck auch direkt mit $\vec{c}$ (Linearkomponente) verschieben.
Geht man einen Vektor in die entgegensetzte Richtung nennt man ihn Gegenvektor (- davor).
Ortsvektor nennt man den Vektor vom Ursprung zu einem Punkt (z.B. der Ortsvektor von A ist $\vec{d}$)

Vektor aus zwei Punkten bestimmen:

Man zieht den Ortsvektor des Punktes ohne Pfeilspitze von dem ab, bei dem die Pfeilspitze ist:

$$\vec{a} = \vec{A}' - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zeichnerisch bestimmt man einen Vektor mit einem Steigungsdreieck.

Linear Abhängig:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Linear Abhängig bedeutet, dass zwei Vektoren 'gleich' sind (parallel oder aufeinander liegen). Gleich beinhaltet hier die gleiche Richtung haben, da ein Vektor lediglich eine Richtung ausdrückt (der Vektor kann durch Multiplizieren mit einer reelen Zahl beliebig gestreckt/gestaucht werden). Die gleiche Richtung haben zwei Vektoren, wenn einer das Vielfache eines anderen ist.

Bei zwei Vektoren geht dies ziemlich einfach durch gleichsetzen und einen Vektor mit einer Parameter multiplizieren:

Linear Abhängig

$$\vec{e} = \vec{f} \cdot t$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot t$$

für $t = 1/3$ haben alle Gleichungen eine Lösung

Linear Unabhängig

$$\vec{e} = \vec{g} \cdot t$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

aus der ersten Gleichung folgt $t = 0{,}5$, doch in der 2. ergibt sich ! $3 = 0{,}5$!

Damit die Vektoren linear abhängig sind, müssen alle Gleichungen lösbar sein.

Bei mehreren Vektoren kann man entweder vorgehen wie oben und jedem mit jedem versuchen, aber einfacher ist Bestimmung der Determinante. Ist diese Ungleich Null sind die Vektoren linear unabhängig, ansonsten linear abhängig (natürlich geht dies auch bei 2 Vektoren)

Bestimmen der Determinanten:

Das so entstandene Gebilde hat 3 Haupt- und 3 Nebendiagonalen:

Hauptdiagonalen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nebendiagonalen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nun werden die Produkte der Elemente der Diagonalen gebildet. Die Produkte der Hauptdiagonalelemente werden dann addiert und die der Nebendiagonalen subtrahiert:

$$\det A = 2*9*1 + 4*1*0 + (-7)*3*(-2) - 0*9*(-7) - (-2)*1*2 - 1*3*4$$
$$= 18 + 0 + 42 + 0 + 4 - 12 = 52$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Erweitern}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 2 & 4 & -7 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Die Determinante lässt sich mit dem GTR mit dem Befehl *det()* bestimmen.

Linearkomponente:

Eine Linearkomponente kann man sich als Abkürzung vorstellen. (siehe Dreieck von oben) Man denkt sich eine Ameise, die von einem Punkt zum anderen läuft. Sie läuft bei A los Richtung A' (also entlang $\vec{a}$) und läuft dann von A' nach A'' (also entlang $\vec{b}$). Kürzer für sie wäre es allerdings direkt von A nach A'' zu laufen (also entlang $\vec{c}$). Somit ergibt sich folgendes: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Läuft sie entgegen einen Vektor stellt man ein Minus vor diesen.
Um eine Linearkomponente bilden zu können müssen die beiden (Span-)Vektoren ($\vec{a}$ und $\vec{b}$) linear unabhängig sein.

Zum Überprüfen, ob ein Vektor eine Linearkomponente eines anderen ist, geht man folgendermaßen vor:

$$\vec{c}=\vec{a}\cdot t+\vec{b}\cdot r$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot t+\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot r$$

aus der oberen Gleichung ergibt sich für $t=1$ und $r=1$, diese Werte stimmen auch für die untere Gleichung => ist $\vec{c}$ die Linearkomponente von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Bei Vektoren mit mehreren Komponenten braucht man soviele Parameter wie man Komponenten hat (3D-Raum: 3)

Bereitgestellt von: www.sven-reichel.de

Natürlich geht dies alles auch im 3D-Raum mit Vektoren die 3 Komponenten haben, sowie auch mit Vektoren die beliebig viele Komponenten haben.

Alle Angaben ohne Gewähr!

by Sven Reichel