Mathe – Folgen/Vollständige Induktion

1. Folgen:

Definition: Unter einer (Zahlen-)Folge versteht man eine Funktion, deren Definitionsbereich N (oder eine Teilmenge) davon ist.

rekursive Folgen: z.B. $a_{n+1}=2\cdot a_n+1$ (Turm von Hanoi)
$a_1=1$

benötigt: 1. ein Term
2. Startwert
muss von Wert zu Wert durchgerechnet werden.

Explizite Folgen: z.B. $a_n=2^n-1$ (Turm von Hanoi)

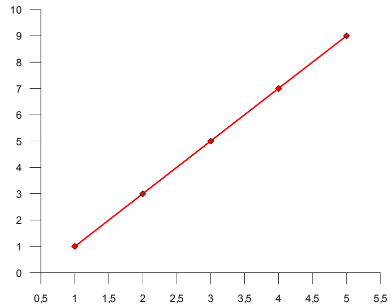
benötigt keinen Startwert
kann direkt berechnet werden.

Bsp:

$a_1=1$
$a_2=3$
$a_3=5$
$a_4=7$
$a_5=9$

explizit: $a_n=2\text{n}-1$

rekursiv: $a_{n+1}=a_n+2$
$a_1=1$



Umwandlung von rekursiven in explizite Folge:
Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern

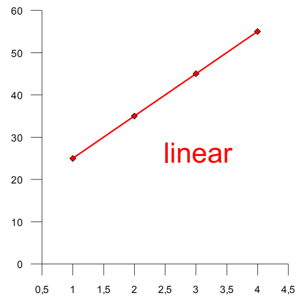
Bsp:

$b_n=n^{٢}+١$
$b_{n+١}-b_n$
$(n+١)^{٢}+١-(n^{٢}+١)$ Bei Folgeglied n+1 für n einsetzen
$n^2+2\text{n}+1+1-n^2-1=2\text{n}+1$
$b_{n+1}-b_n=2\text{n}+1 \quad | \quad +b_n$
also: $b_{n+1}=b_n+2\text{n}+1$

arithmetische Folgen: Form: $a_n=a+dn$ mit Anfangswert a und Differenz d

rekursiv: $a_0=a$
$a_{n+1}=a_n+d$

Bsp: Hans bekommt zu seinem Startguthaben von 25€ monatlich 10€:



zit: $a_0=25$ $\quad a_n=25+10n$

$a_1=35$

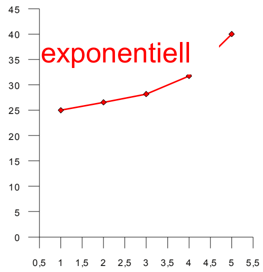
$a_2=45$ rekursiv: $a_{n+1}=a_n+10$

$a_3=55$ mit: $a_0=25$

geometrische Folgen: Form: $b_n=b\cdot q^n$ mit Anfangswert b und Quotient q

rekursiv: $b_0=b$

$b_{n+1}=b_n\cdot q$



Bsp: Jemand bekommt ein Konto mit dem Guthaben 25€ und monatl. 1,2% Zinsen

$b_0=25{,}00$ explizit: $b_n=٢٥\cdot١,٠١٢^n$

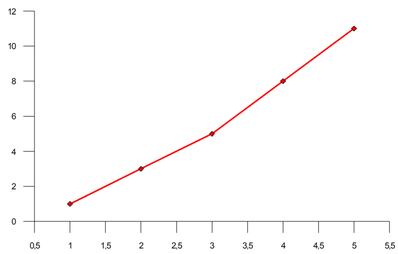
$b_1=25{,}30$

$b_2=25{,}60$ rekursiv: $b_{n+1}=b_n\cdot 1{,}012$

$b_3=25{,}91$ mit: $b_0=25$

2. Monotonie von Folgen:

streng monoton: a_n ist streng monoton steigend/fallend, wenn das nächste Folgeglied stets größer/kleiner als sein Vorgänger ist.



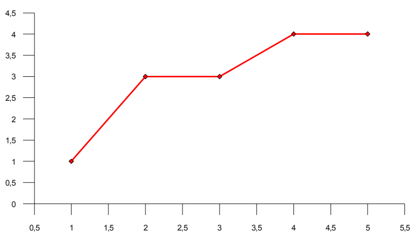
$a_{n+1}>a_n$

$a_{n+1}-a_n>0$

$a_{n+1}<a_n$

$a_{n+1}-a_n<0$

nur monoton: a_n ist monoton steigend/fallend, wenn das nächste Folgeglied größer/kleiner oder gleich als sein Vorgänger ist.



$a_{n+1}\geq a_n$

$a_{n+1}-a_n\geq 0$

$a_{n+1}\leq a_n$

$a_{n+1}-a_n\leq 0$

Rechnerischer Nachweis: $a_n=\dfrac{4-3n}{2n-1}$ für $n\geq 1$ Vermutung: streng monton fallend

1. Weg: auffassen als Funktionsterm => Ableitung

$$f(x)=\frac{4-3x}{2x-1}$$

$$f'(x)=\frac{-3(2x-1)-2(4-3x)}{(2x-1)^2}=\frac{-5}{(2x-1)^{2\text{binom}}} \quad <0 \; >0 \quad <0$$

=> streng monoton fallend

2. Weg: $a_{n+1}-a_n<0$ überprüfen

$$a_{n+1}=\frac{1-3n}{2n+1}$$

$$\frac{1-3n}{2n+1}-\frac{4-3n}{2n-1}=\frac{-5}{4n^2-1^2} \quad \begin{matrix}<0\\ >0, da\ n\geq 1\end{matrix} \quad <0$$

3. Beschränktheit von Folgen:

Definition: Eine Folge nennt man <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es eine obere Schranke S gibt, so dass gilt: $a_n\leq S$, die für alle n gilt.
Eine Folge nennt man <u>nach unten beschränkt</u>, wenn es eine untere Schranke s gibt, so dass gilt: $a_n\geq s$, die für alle n gilt.
Eine Folge nennt man <u>beschränkt</u>, wenn es eine obere und untere Schranke gibt, so dass gilt: $s\leq a_n\leq S$

Bsp:

1. unbeschränkt: $b_n=n\cdot\sin(n)$

2. nach oben/unten beschränkt: $a_n = 1 - 1 \; 0 \; \mathbb{N}$ mit $n\geq 1$ Schranke: S_1=1 S_2=0

Grenzwert S_1: $\frac{1}{n}\rightarrow 0$ für $n\rightarrow\infty$

\+ streng monoton wachsend

3. $c_n=\frac{4-3n}{2n-1}$ mit $n\geq 1$ s.o.: streng monoton fallend => oben beschränkt

Grenze schätzen, oder GTR: -3/2=-1,5
rechnerisch prüfen:

$$b_n\geq -1{,}5$$
$$\frac{4-3n}{2n-1}\geq -1{,}5$$
$$4\geq 1{,}5$$

stimmt, hängt nicht von n ab => für alle $n\geq 1$ ist $b_n\geq -1{,}5$
=> -1,5 ist eine untere Schranke.

4. Konvergenz:
\- monoton + beschränkte Folge: nähert sich einer Grenze (Grenzwert) an, überschreitet diese allerdings nicht.

$$lim\ a_n=g \quad \text{für} \quad n\rightarrow\infty$$

Bsp: $a_n=5-\frac{1}{n}$ $n\geq 1$ a_n konvergiert gegen 5

Definition: Die Folge a_n konvergiert gegen den Grenzwert g / hat genau dann den Grenzwert g, wenn man zu jedem beliebigen vorgegebenen (noch so kleinen) Abstand *E* > 0 einen Index n_0 findet, so dass für alle Folgeglieder a_n ($n>n_0$) der Abstand zum Grenzwert kleiner als *E* wird – kurz, dass gilt: $|a_n-g|<E$

divergente Folgen: sind nicht konvergente Folgen, also haben keinen Grenzwert

Nullfolgen: haben den Grenzwert g = 0

Alle Angaben ohne Gewähr

by Sven Reichel