Metrische Geometrie

Länge eines Vektors bestimmen:

laut Pythagoras: $|\vec{a}| = |(a_1\, a_2\, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ GTR: norm (A)

Einheitsvektor (Vektor der Länge 1): $\vec{a}^{\cdot} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ GTR: unitV (A)

Überprüfungen:

Gerade || Gerade: die beiden Richtungsvektoren sind l.a.
! überprüfen ob nicht g ε h => Stütz-Punkt in andere Gerade einsetzen

Gerade ╫ Gerade: gleichsetzen, wenn keine Lösung => windschief

Gerade ┴ Gerade: Richtungsvektor * Richtungsvektor = 0

Gerade || Ebene: Richtungsvektor * Normalvektor der Ebene = 0
! überprüfen ob nicht $g\, C\, E$ => Stütz-Punkt in Ebene einsetzen

Ebene || Ebene: in Koordinatenform, x1-x2-x3 sind 'gleich' und c unterscheidet sich, wenn c auch gleich Ebenen identisch

Umwandlungen:

Koordinatenform => Parameterform: Kreuzprodukt GTR: crossP (A, B)

Parameterform => Koordinatenform: 3 Spurpunkte suchen: Punkte so wählen , dass die Gleichung stimmt; mithilfe der Spurpunkte Ebene aufspannen

Normalenform => Koordinatenform: ausmultiplizieren

Rechenregeln:

- $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = (60 + 63)$ GTR: dotP (A, B)
- $\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^2 = (9+16) \cdot (1+1) = 25 \cdot 2 = 50$

Winkelberechnungen:

Geraden – Gerade:

$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos\alpha$ wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dann $\alpha = 90°$ da $\cos 90° = 0$

GTR: angle (A, B)

Ebene – Ebene:

Normalvektor der Ebene: $2x_1 - 3x_2 + 17x_3 = c$ => $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel der Normalvektoren sind die Schnittwinkel der Ebenen.

Ebene – Gerade:

Normalvektor steht im rechten Winkel auf der Ebene, folglich kann der Schnittwinkel zwischen Normalvektor und Richtungsvektor der Geraden benutzt werden ($\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$)

Abstandberechnungen:

Punkt – Punkt:

Vektor zwischen den Punkten bestimmen, dann Länge des Vektors errechnen s.o.

Punkt – Gerade:

verschiebbare Lotfußpunkte bestimmen; Lot fällen, daraus s errechnen; Abstand Lotfußpunkt und Punkt errechnen

Punkt – Ebene:

Lotfußpunkt nicht verlangt:

normieren der Ebene

HNF von Ebene bilden: $\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - c}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

Punkt in HNF einsetzen

oder: $d(P, E) = \left| (\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}^0 \right|$

$\vec{q}$ ist Ortsvektor eines Punktes von E; $\vec{p}$ ist der Punkt

Lotfußpunkte verlangt:

beliebige Lotfußpunkte bestimmen; Lot fällen, daraus s und t errechnen; Abstand Lotfußpunkte und Punkt errechnen

windschiefe Geraden:

Lotfußpunkte verlangt: jeweils einen verschiebbaren Lotfußpunkt auf einer Geraden bestimmen

$\overrightarrow{F_g F_h} \wedge g = (\vec{F}_h - \vec{F}_g) \cdot \vec{g} = 0$; $\vec{g}$ ist Richtungsvektor von g

$\vec{F}_g F_h \wedge h = (\vec{F}_h - F_g) \cdot \vec{h} = 0$; $\vec{h}$ ist Richtungsvektor von h

Vektor der Lotfußpunkte ausrechnen und dessen Länge bestimmen

Lotfußpunkte nicht verlangt: $d(g, h) = \left| (\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}^0 \right|$

$\vec{p}$ und $\vec{q}$ sind die Stütz-Punkte; $\vec{n}^0$ der Einheitsvektor des Normalvektors, bestimmen mit Kreuzprodukt(s.o.)

Winkelhalbierende:

Geraden: LK der Einheitsvektoren gibt die Richtung, Schnittpunkt der Stütz-Punkt

Ebenen: HNF addieren, da Symetrieachsen überall den gleichen Abstand zu den Ebenen haben

Flächeninhalt:

Parallelogramm: $A=\sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$
Recchtek: $A=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Alle Angaben ohne Gewähr

by Sven Reichel