| 19.02.04 | KA Nr.1 (105') | M $12_2$ /Su |
|---|---|---|

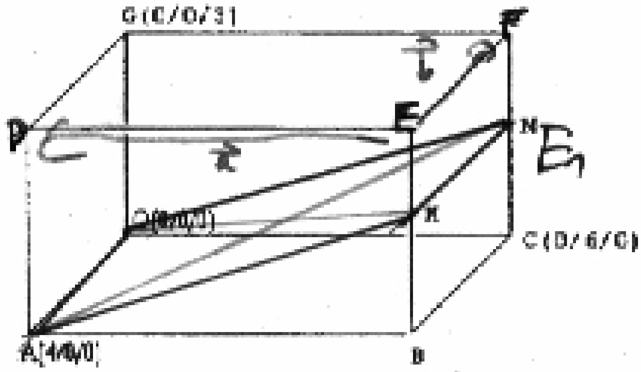
## Teil 1 (*ohne Taschenrechner und Formelsammlung*)

**Aufgabe 1:** *(4 Punkte)*

In der Abbildung ist ein Quader dargestellt. M und N sind die Mittelpunkte der zugehörigen Kanten.

a) Gib eine Gleichung der Ebene an, die D, E und F enthält.

b) Welche Lage haben die Geraden g = OM und h = AN zueinander? Begründe deine Antwort geometrisch.




**Aufgabe 2:** *(3 Punkte)*

Gegeben sind die Punkte A $(2|-1|3)$, B $(4|2|-4)$ und C $(0|1|-2)$.

a) Zeige, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

b) Ermittle eine Koordinatengleichung der Ebene, die A, B und C enthält.

**Aufgabe 3:** *(6 Punkte)*

Gegeben sind die Ebenen ~~E: $3x_1 + 4x_3 = 12$~~ und F: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

a) Veranschauliche beide Ebenen mithilfe ihrer Spurgeraden.

b) Bestimme die Schnittgerade zeichnerisch (keine Rechnung!). Lies zwei Punkte der Schnittgeraden aus der Zeichnung ab und bestimme so die Gleichung der Schnittgeraden näherungsweise.

c) Gib eine Gleichung der zu F parallelen **Urprungs**ebene $E_2$ in Parameter- und Koordinatenform an.

**Aufgabe 4:** *(5 Punkte)*

Gegeben sind drei Ebenen E, F und G mit

$$E: -4x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 7$$
$$F: \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$G: \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

a) Welche besondere Lage haben die Ebenen E und F zueinander?

2. Wie erkennst du dies an den Koordinatengleichungen?

3 Wie wäre die rechte Seite in der Gleichung von E abzuändern, damit E und F identische Ebenen wären?

b) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen F und G.

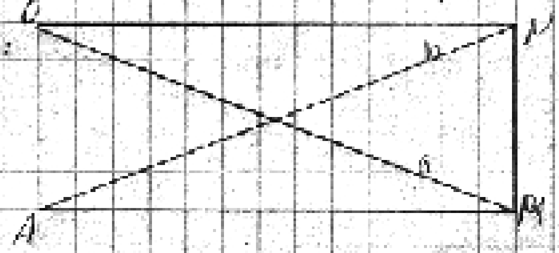
Mathe KA 12.2/1 15.7.04

**A1:** a) $D(4|0|3)$ $E(4|6|3)$ $F(0|6|3)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix}$$

b) $N(0|6|1{,}5)$ $M(4|6|1{,}5)$

$E_1$:



Sie liegen in derselben Ebene, ~~weil sich die ...~~ weil ~~...~~ N und M die selben $x_2, x_3$ Werte besitzen, ~~und~~, O und A ebenfalls die gleichen $x_2, x_3$ Wert besitzen, M und A den gleichen $x_1$ Wert und ~~...~~ und N und O den gleichen $x_1$ Wert haben.
Resultat davon ist ein Rechteck s.o.
$\overline{NA}$ und $\overline{OM}$ sind die Diagonalen in diesem und schneiden sich.

4

**A2:** $\overline{AB}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix}$

$\overline{AC}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\2\\-5\end{pmatrix}$

$\overline{BC}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\-1\\-6\end{pmatrix}$

$\overline{AB}$ u. $\overline{AC}$: $\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$ keine Lösung daher $\Rightarrow$ l.u.

$\overline{AC}$ u. $\overline{BC}$: $\begin{pmatrix}-2\\2\\-5\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-4\\-1\\-6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ l.u.

$\overline{AB}$ u. $\overline{BC}$: $\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-4\\-1\\-6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ l.u.

umständlich

12 b) Ausgangspunkt $A$:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -7 | 2 | 3 | -7 |
| -2 | 2 | -5 | -2 | 2 | -5 |
| | +1 | 24 | 10 | | |

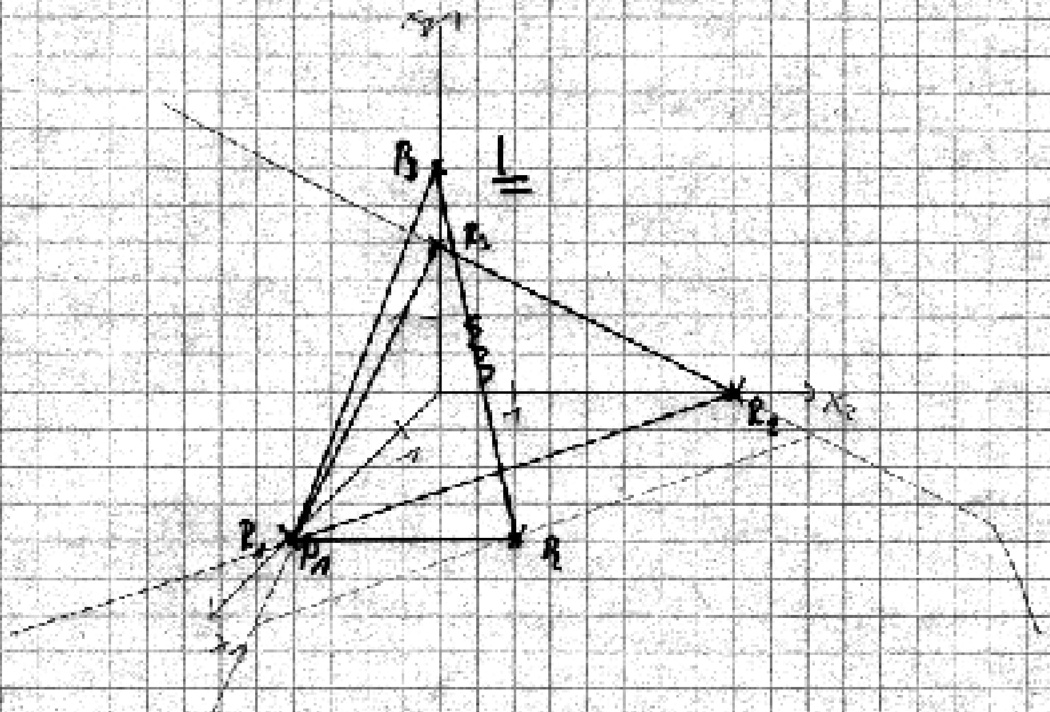
$-1x_1 + 24x_2 + 10x_3 = -2 - 24 + 30$

$-1x_1 + 24x_2 + 10x_3 = 4$

3

A3: Spurpunkte $E$: $P_1(4|0|0)$ $P_2(4|3|0)$ $P_3(0|0|3)$ (=> parallel zur $x_1$-Achse)

" $F$: $R_1(4|0|0)$ $R_2(0|4|0)$ $R_3(0|0|2)$




$P_1$ u. $P_2$ sind 2 Punkte d. Schnittgeraden

$P_1(4|0|0)$ $P_2(4|3|0)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$!

$\frac{1}{2}$!

⇒

Ursprung gehen

$F: \quad x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 \qquad x_2$ sei $s$ ; $x_3$ sei $v$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_2 \parallel F \Rightarrow$ gleiche Spannvektoren

Ursprungsebene $\Rightarrow$ Ausgangspunkt $O(0|0|0)$

$$E_2: \underline{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{s}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

r 1.0

K-Form:

$$\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$1 \quad 1 \quad 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

2

A4: 1. F in ~~Koordinaten~~ P-Form: $x_1 = 1 + 3x_2 - 2x_3$ $x_2$ sei u $x_3$ sei s

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

F in E eingesetzt: $-4\cdot(1 - 2s + 3u) + 12(u) - 8s = 7$

$$-4 + 8s - \cancel{12u} + \cancel{12u} - 8s = 7$$

$$-4 = 7 \quad ↯$$

$$L = \{\} \Rightarrow F \underset{(\text{echt})}{\parallel} E$$

2. Die beiden Koordinatenformen sind bis auf c identisch wenn man F · (-4) nimmt

$$E: -4x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 7$$

$$-4x_1 + 12x_2 - 8x_3 = -4$$

3. wäre c identisch würden die Ebenen aufeinander liegen

$\Rightarrow (-4)$ müsste 7 sein od. 7 müsste (-4) sein

b) ~~G in Koordinatenform~~:

~~1)~~ P-Form von F in G eingesetzt:

$$1 - 2s + 3u - u + s = 1$$

$$-s + 2u = 0$$

$$s = 2u$$ eingesetzt in P-Form von F

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2u\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \quad (+)$$

4

r!

# Teil 2 (*mit classpad 300 und Formelsammlung*)

| **Aufgabe 5:** | *(9 Punkte)* |
|---|---|

a) Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$ und der

Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$

c) Schneiden sich die Ebenen? Gib gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden an.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k, l \in \mathbb{R} \quad \text{und } E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

| **Aufgabe 6:** | *(4 Punkte)* |
|---|---|

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

a) Gib eine Gleichung der Parallelen k zu g durch den Punkt P(-1 | 4 | 3) an.

b) Gib außerdem eine Gleichung der Mittelparallelen m von g und k an und begründe kurz dein Vorgehen.

| **Aufgabe 7:** | *(4+2+3=9 Punkte)* |
|---|---|

Die Punkte O (0 | 0 | 0), A (6 | 0 | 0), B (0 | 6 | 0), C (0 | 0 | 6) und F (6 | 6 | 6) sind Eckpunkte eines Würfels.

a) Die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ schneidet den Würfel in einem Sechseck. Zeichne den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem. *Bestimme dabei die Schnittpunkte zeichnerisch.*

b) Für welche Werte von a schneidet die Ebene $E_a$: $x_1 + x_2 + x_3 = a$ $(a \in \mathbb{R})$ den Würfel? Begründe. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a?

A5: a) $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} \Rightarrow x=2$ ↯ $\Rightarrow$ l. u. $\Rightarrow$ Schnittpunkt od. windschief

$g=h$ $\quad 2 + 2s = 4t$ ✓ $\Rightarrow$ ~~t = ...~~
$5 + 4s = -1 + 6t$ ✓
$3 + s = 2 + 2t$ ✓

Überprüfen

| t | s | |
|---|---|---|
| $-4$ | $2$ | $-2$ |
| $-6$ | $4$ | $-6$ |
| $-2$ | $1$ | $-1$ |

$t = -1$
$s = -3$

für $t=-1$ und $s=-3$ haben alle 3 Gl. eine Lösung
$\Rightarrow$ Geraden schneiden sich in $S(-4/-7/0)$

b) E in Koordinatenform:

$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$ ✓

g in K-Form von E eingesetzt:

$-1(2+2s) - 2(5+4s) + 3(3+s) = 4$
$-2 - 2s - 10 - 8s + 9 + 3s = 4$
$-7s = 7 \Rightarrow s = -1$

s in g eingesetzt ergibt Schnittpunkt $S(0/1/2)$

d) $E_1$ in Koordinatenform:

$-7x_1 + x_2 + 5x_3 = 10$

E in K-Form von $E_2$:

$-7\cdot(1+5u+l) + -5u + 2l + 5\cdot(2+8u+l) = 10$
$-7 - 35u - 7l - 5u + 2l + 10 + 40u + 5l = 10$

$0 = 7$ ↯

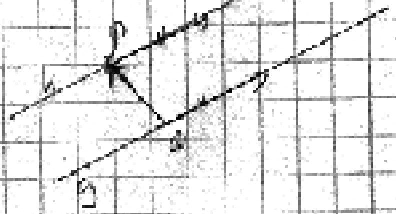
Keine Lösung $\Rightarrow$ Ebenen sind echt parallel $E_1 \parallel E_2$

9

A 6: a) Parallele $\Rightarrow$ h gleichen Richtungsvektor wie g

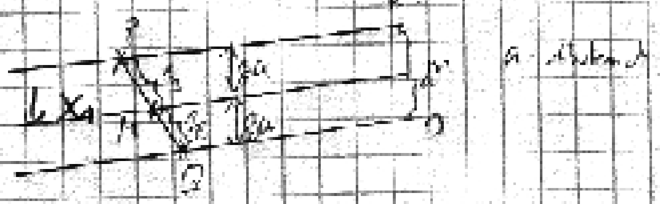
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \checkmark$$

$\uparrow$ Punkt P



P bestimmt d. Abstand zwischen h und g, wenn man nun von P mit dem Richtungsvektor von g ausgeht erhält man die obige Gleichung

b)



$P(-1|4|3)$ $\quad Q(5|2|-1)$ $\quad M = \frac{\vec{QP}}{2}$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix}-6/2\\2/2\\2/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

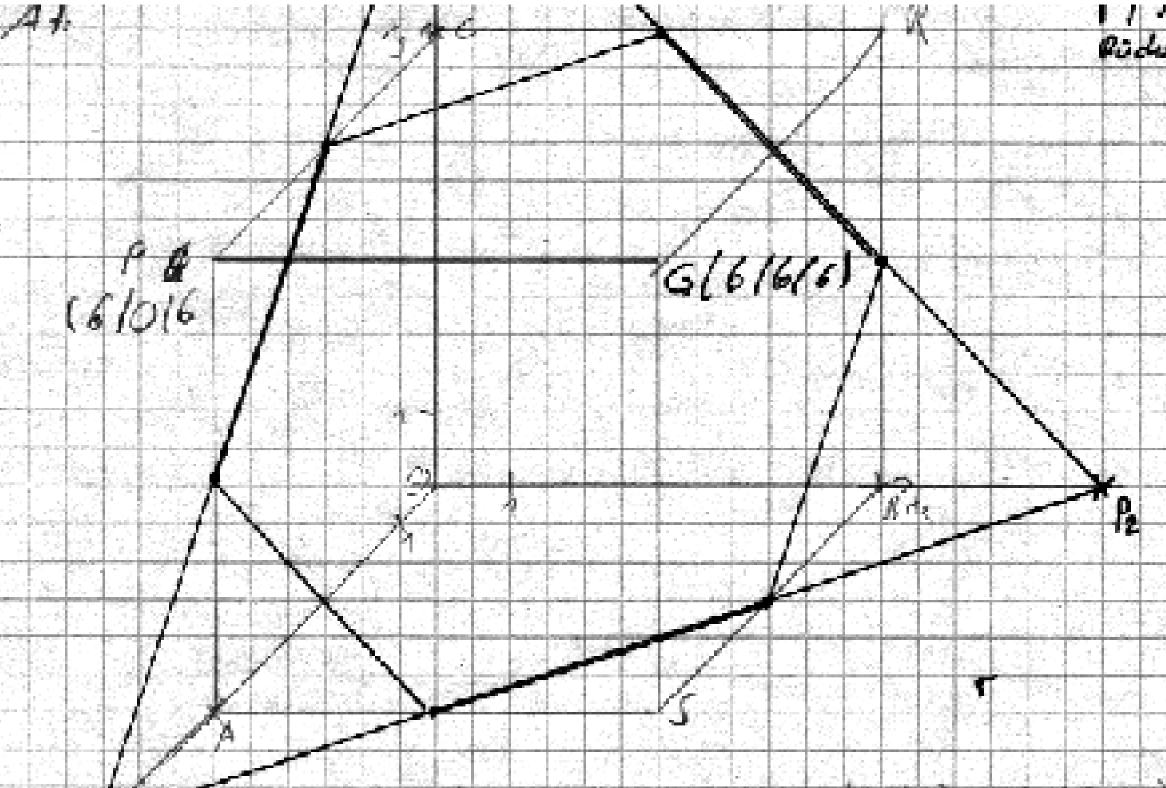
da m parallel zu g ist ~~hat~~ haben die beiden Geraden den selben Richtungsvektor

$$m: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \quad (r)$$

$X_1$ ist so, weil eine Gerade die die Parallelen schneidet überall im gleichen Verhältnis geteilt wird ~~und daher der~~ ✓

3

A1. Rückseite




a) Spurpunkte d. Ebene: $P_1(9|0|0)$ $P_2(0|9|0)$ $P_3(0|0|9)$

S-Punkte kann man ablesen, da sich die Geraden im gleichen Quadranten befinden

b) 1. Die Ebenenscharen ~~Ea~~ der Ebenenscharen $E_a$ sind parallel. Der äußerste Punkt wo es noch zu einem Schneiden kommt ist Punkt G.

$E_a: x_1 + x_2 + x_3 = a$

Werte von G eingesetzt: $6 + 6 + 6 = a \Rightarrow a = 18$

folglich liegt für $a = 18$ Punkt G auf d. Ebene (maximal Wert)

Der äußerste Punkt auf d. anderen Seite ist der Ursprung.

Werte von O eingesetzt in $E_a$: $0 + 0 + 0 = a \Rightarrow a = 0$

folglich liegt für $a = 0$ der Punkt O auf d. Ebene (minimal Wert)

$\Rightarrow$ Ebene $E_a$ schneidet d. Würfel für $0 \leq a \leq 18$

2. 1 Schnittpunkt für $a = 0$ u. $a = 18$

3 Schnittpunkte bis E durch A, C, B geht

Wert von C einsetzen: $a = 6$

$\Rightarrow$ 3 Schnittpunkte für $0 < a \leq 6$

3 Schnittpunkte wenn E durch P, R, S geht

P-Werte eingesetzt: $a = 12$

6. [illegible]

Zusammenfassung: 1 Schnittpunkt für $a = 0$ u. $a = 18$

3 Schnittpunkte für $0 < a \leq 6$ und $12 \leq a < 18$

6 Schnittpunkte für $6 < a < 12$

r

$\frac{9}{38\frac{1}{2}}$

15

20.02.04